Nova bibliografia:

Título: Organização e projeto de computadores a interface Hardware/Software. Autor: David A. Patterson & John L. Hennessy. Tradução: Nery Machado Filho. Editora: Morgan Kaufmmann Editora Brasil: LTC (0.21.21.2221.9621)
Edição: 2ª

1 Conversão de Bases

1.1 NOTAÇÃO POSICIONAL - BASE DECIMAL

Desde os primórdios da civilização o homem vem adotando formas e métodos específicos para representar números, tornando possível, com eles, contar objetos e efetuar operações aritméticas (de soma, subtração etc.).

A forma mais empregada de representação numérica é a chamada *notação posiciona!.* Nela, os algarismos componentes de um número assumem valores diferentes, dependendo de sua posição relativa no número. O valor total do número é a soma dos valores relativos de cada algarismo. Desse modo, é a posição do algarismo ou dígito que determina seu valor.

A formação de números e as operações com eles efetuadas dependem, nos sistemas posicionais, da quantidade de algarismos diferentes disponíveis no referido sistema. Há muito tempo a cultura ocidental adotou um sistema de numeração que possui dez diferentes algarismos — 0, 1, 2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e, por essa razão, foi chamado de *sistema decimal.*

A quantidade de algarismos disponíveis em um dado sistema de numeração é chamada de *base;* a base serve para contarmos grandezas maiores, indicando a noção de grupamento. O sistema de dez algarismos, acima mencionado, tem base 10; um outro sistema que possua apenas dois algarismos diferentes (0 e 1) é de base 2, e assim por diante.

Vamos exemplificar o conceito de sistema posicional. Seja o número 1303, representado na base 10, escrito da seguinte forma:

1303_{10}

Em base decimal, por ser a mais usual, costuma-se dispensar o indicador da base, escrevendo-se apenas o número:
1303

Neste exemplo, o número é composto de quatro algarismos:

1, 3, 0 e 3

e cada algarismo possui um valor correspondente à sua posição no número.

Assim, o primeiro 3 (algarismo mais à direita) representa 3 unidades. Neste caso, o valor absoluto do algarismo (que é 3) é igual ao seu valor relativo (que também é 3), por se tratar da 1ª posição (posição mais à direita, que é a ordem das unidades). Considerando-se o aspecto três vezes a potência 0 da base 10 ou

$3 \times 10^0 = 3$

enquanto o segundo 3 vale três vezes a potência 2 da base 10 ou

$3 X 10^2 = 300$

O valor total do número seria então:

$1000 + 300 + 0 + 3 = 1303_{10}$

$1 X 10^3 + 3 X 10^2 + O X 10^1 + 3 X 10^0 = 1303_{10}$

Generalizando, num sistema qualquer de numeração posicional, um número N é expresso da seguinte forma:

$N = (d_{n-1} d_{n-2} d_{n-3} .... d_1 d_0)_b$ (1.1)

onde:

d indica cada algarismo do número;

n-1, n-2, 1, 0 índice, indicam a posição de cada algarismo;

b indica a base de numeração;

n indica o número de dígitos inteiros.

O valor do número pode ser obtido do seguinte somatório:

$N=d_{n-1} X b^{n-1} + d_{n-2}Xb^{n-2} +.... + d_1Xb^1 +d_0Xb^0$ (1.2)

Desse modo, na base 10, podemos representar um número:

N = 3748

onde:

n 4 (quatro dígitos inteiros).

Utilizando a fórmula indicada acima:

$d_{n-1} =3$ ou $d_3 =3;d_2 =7;d_1 =4;d_0 =8$

ou obtendo seu valor de acordo com a fórmula mostrada acima:

$N=3X10^3 + 7X10^2 + 4X10^1 + 8X10^0$

$= 3000 + 700 + 40 + 8 = 3748_{10}$

Obs: Números fracionários são apresentados em detalhe na próxima aula.

1.2 - OUTRAS BASES DE NUMERAÇÃO

Vejamos, em seguida, como representar números em outra base de numeração.

Entre as bases diferentes da 10, consideremos apenas as bases 2 e potências de 2, visto que todo computador digital representa internamente as informações em algarismos binários, ou seja, trabalha em base 2. Como os números representados em base 2 são muito extensos (quanto menor a base de numeração, maior é a quantidade de algarismos necessários para indicar um dado valor) e, portanto, de difícil manipulação visual, costuma-se representar externamente os valores binários em outras bases de valor mais elevado. Isso permite maior compactação de algarismos e melhor visualização dos valores. Em geral, usam-se as bases octal ou hexadecimal, em vez da base decimal, por ser mais simples e rápido converter valores binários (base 2) para valores em bases múltiplas de 2.

Utilizando-se a notação posicional indicada na expressão (1.1), representam-se números em qualquer base:

$(1011)_2$ nabase2

$(342)_5$ – na base 5

$(257)_8$ – na base 8

No entanto, nas bases diferentes de 10, o valor relativo do algarismo (valor dependente de sua posição no número) é normalmente calculado usando-se valores resultantes de operações aritméticas em sua base.

Exemplo 1.1

- Seja o número na base **2:** (1011)2 (usou-se a descrição da expressão 1.1)
- Se aplicássemos a expressão (1.2), teríamos:

$1X2^3 + 0X2^2 + 1X2^1 + 1X2^0 =$

$= 8 + 0 + 2 + 1 = (11)_{10}$

- Este valor 11 está expresso na base 10 e será, portanto, (ll) e não na base 2.

Exemplo 1.2

$(1043)_5 = 1X5^3 + 0X5^2 + 4X5^1 + 3X5^0 =$

$= 125 + 0 + 20 + 3 = (148)_{10}$

Sobre o assunto, podemos concluir:

a) O número máximo de algarismos diferentes de uma base é igual ao valor da base.

Exemplo:

- na base 10 temos dez dígitos: de 0 a 9;
- na base 2 temos apenas dois dígitos: 0 e 1;
- na base 5 temos cinco dígitos: de O a 4.

b)O valor do algarismo mais à esquerda (mais significativo) de um número de n algarismos inteiros é obtido pela multiplicação de seu valor absoluto (algarismo d_{n-1}) pela base elevada à potência (n-1), ou seja: (d_{n-1} X b^{n-1}).

c) O valor total do número é obtido somando-se n valores, cada um expressando o valor relativo de um dos n algarismos componentes do número.

Exemplo 1.3

a) 375_{10}
n=3 (3 algarismos)
$3 X10^2 + 7X10^1 + 5X10^0$ = (3produtos)
300 + 70 + 5 (3 valores a somar)

b)11101_2 (5 algarismos)
$\underline{1X2^4} + \underline{1X2^3} + \underline{1X2^2} + \underline{0X2^1} + \underline{1X2^0}$ (5 produtos – 5 valores)

1o. prod. 2o. prod. 3o. prod. 4o.prod. 5o.prod.
16 + 8 + 4 + 0 + 1 = 29_{10}

A base do sistema binário é 2 e, conseqüentemente, qualquer número, quando representado nesse sistema, consiste exclusivamente em dígitos 0 e 1. O termo dígito binário é chamado *bit,* contração do termo inglês binary digit.

Por exemplo, o número binário 11011 possui cinco dígitos, ou algarismos binários. Diz-se que o referido número é constituído de 5 bits.

Em bases de valor superior a 10, usam-se letras do alfabeto para a representação de algarismos maiores que 9. Uma dessas bases é especialmente importante em computação; trata-se da base 16 ou hexadecimal, por ser de valor múltiplo de 2 (como a base 8).

Nessa base, os “algarismos” A, B, C, D, E e F representam, respectivamente, os valores (da base 10): 10, 11, 12, 13, 14 e 15.

Na base 16 (hexadecimal), dispomos de 16 algarismos (não números) diferentes:

0, 1, 2, 3, ..., 9, A, B, C, D, E e F

Um número nessa base é representado na forma da expressão (1.1):

$(1A7B)_{16}$

O seu valor na base 10 será obtido usando-se a expressão (1.2):

$1X16^{3} + 10X16^{2} + 7X16^{1} + 11X16^{0} = 4096 + 2560 + 112 + 11 = 6779_{10}$

Observemos que na fórmula (1.2) foram usados os valores 10 (para o algarismo A) e 11 (para o algarismo B) para multiplicar as potências de 16. Por isso, obtivemos o valor do número na base 10.

Em outras palavras, utilizamos valores e regras de aritmética da base 10 e, por isso, o resultado encontrado é um valor decimal. A tabela 1.1 mostra a representação de números nas bases 2, 8, 10 e 16.

Tabela 1.1

Base 2	**Base 8**	**Basel 10**	**Base 16**
0	0	0	0
1	1	1	1
10	2	2	2
11	3	3	3
100	4	4	4
101	5	5	5
110	6	6	6
111	7	7	7
1000	10	8	8
1001	11	9	9
1010	12	10	A
1011	13	11	B
1100	14	12	C
1101	15	13	D
1110	16	14	E
1111	17	15	F
10000	20	16	10
10001	21	17	11

Pela tabela, podemos observar que os dígitos octais e hexadecimais correspondem a combinações de 3 (octais) e 4 (hexadecimais) bits (algarismos binários). Sendo a base desses sistemas de valor maior que a base 2 e tendo em vista essa particularidade na representação de números nas bases 8 e 16 em relação à base 2, verifica-se que é possível converter rapidamente números da base 2 para as bases 8 ou 16, ou vice-versa.

Por exemplo, o número (101111011101), na base 2, possui 12 algarismos (bits), mas pode ser representado com quatro algarismos octais ou com apenas três algarismos hexadecimais.

$(101111011101)_2 = (5735)_8$

porque: 101 = 5; 111= 7; 011 = 3 e 101 = 5

$(101111011101)_2 = (BDD)_{16}$

porque: 1011 = B; 1101 = D; 1101 = D.

1.3 - CONVERSÃO DE BASES

Uma vez entendido como representar números em notação posicional, e como esta notação é aplicável em qualquer base inteira, podemos exercitar a conversão de números de uma base para outra.

Interessa-nos, principalmente, verificar o processo de conversão entre bases múltiplas de 2, e entre estas e a base 10, e vice-versa.

1.3.1 - Conversão entre Bases Potência de 2

1.3.1.1 - Entre as Bases 2 e 8

Como $8 = 2^3$, um número binário (base 2) pode ser facilmente convertido para o seu valor equivalente na base 8 (octal). Se o número binário for inteiro, basta dividi-lo, da direita para a esquerda, em grupos de 3 bits (o último grupo não sendo múltiplo de 3, preenche-se com zeros à esquerda). Então, para cada grupo, acha-se o algarismo octal equivalente, conforme mostrado na tabela 3.1.

A conversão de números da base 8 para a 2 é realizada de forma semelhante, no sentido inverso; substitui-secada algarismo octal pelos seus 3 bits correspondentes (ver tabela 3.1).

Exemplo 1.4

1) $(111010111)_2 = (\ )$

$(111)\ (010)\ (111)_2 = (727)_8$
7 2 7

2) $(1010011111)_2 = (\ )_8$

$(001)\ (010)\ (011)\ (111)_2 = (1237)_8$
1 2 3 7

3) $(327)_8 = ()_2$

$(011)\ (010)\ (111)_2 = (11010111)_2$
3 2 7

4) $(673)_8 = (\ )_2$

$(110)\ (111)\ (011)_2 = (110111011)_2$
6 7 3

1.3.1.2 - Entre as Bases 2 e 16

O procedimento de conversão entre números binários e hexadecimais (base 16) é idêntico ao da conversão entre as bases 2 e 8, exceto que, neste caso, a relação é $16 = 2^4$.

Desse modo, um algarismo hexadecimal é representado por 4 bits (ver tabela 3.1); converte-se um número binário em hexadecimal, dividindo-se este número em grupos de 4 bits da direita para a esquerda.

A conversão de hexadecimal para binário é obtida substituindo-se o algarismo hexadecimal pelos 4 bits correspondentes, de acordo com os valores indicados na tabela 3.1.

Exemplo 1.5

1) $(1011011011)_2 = (\ )_{16}$
$(0010)\ (1101)\ (1011)_2 = (2DB)_{16}$
2 D B

2) $(10011100101101)_2 =$
$(0010)\ (0111)\ (0010)\ (1101)_2 = (272D)_{16}$
2 7 2 D

3) $(306)_{16} = (\ )_2$

$(0011)\ (0000)\ (0110)_2 = (1100000110)_2$
3 0 6

4) $(F50)_{16} = (\ )_2$
$(1111)\ (0101)\ (0000)_2 = (111101010000)_2$
F 5 0

1.3.1.3- Entre as Bases 8 e 16

Oprocesso de conversão utiliza os mesmos princípios antes apresentados. No entanto, como a base de referência para as substituições de valores é a base 2, esta deve ser empregada como intermediária no processo. Ou seja, convertendo-se da base 8 para a base 16, deve-se primeiro efetuar a conversão para a base 2 (como mostrado nos subitens anteriores) e depois para a base 16. E o mesmo ocorre se a conversão for da base 16 para a base 8.

Exemplo 3.6

1) $(3174)_8 = (\ )_{16}$

$= (011)(001)(111)(100)_2 = (11001111100)_2$

$= (0110)(0111)(1100)_2 = (67C)_{16}$

2) $(254)_8 = (\ )_{16}$

$= (010)(101)(100)_2 = (010101100)_2$

$= (1010)(1100)_2 = (AC)_{16}$

3) $(2E7A)_{16} = (\ )_8$

$= (0010)(1110)(0111)(1010)_2 = (0010111001111010)_2 =$

$= (010)(111)(001)(111)(010)_2 = (27172)_8$

4) $(3C7)_{16} = (\ )_8$

$= (0011)(1100)(0111)_2 = (1111000111)_2 =$

$= (001)(111)(000)(111)_2 = (1707)_8$

1.3.2 - Conversão de Números de uma Base B para a Base 10

A conversão de um número, representado em uma base B qualquer, para seu correspondente valor na base l0 é realizada empregando-se a fórmula (1.2). A melhor maneira de compreender o processo de conversão consiste na realização de alguns exemplos práticos, onde se indica, detalhadamente, a aplicação da referida fórmula.

Os exemplos apresentados referem-se apenas a números inteiros.

Exemplo 1.7

1) $(101101)_2 = (\ )_{10}$

Substituindo, na expressão (1.2), as letras pelos valores do exemplo, teremos:
b = 2 (a base origem do número a ser convertido)
n = 6 (6 algarismos);
n - 1 = 5 (expoente do W produto mais à esquerda)
d_1 =1
1º produto: $d_{n-1} \text{ X } b^{n-1} = 1 \text{ X } 2^5$

Os demais produtos seguem a seqüência da expressão (1.2), resultando em:

$1 \text{ X } 2^5 + 0 \text{ X } 2^4 + 1 \text{ X } 2^3 + 1 \text{ X } 2^2 + \text{O X } 2^1 + 1 \text{ X } 2^0$

$= 32 + \text{O} + 8 + 4 + \text{O} + 1 = (45)_{10}$

2) $(27)_8 = (\ )_{10}$

Da mesma maneira, substitui-se na expressão (1.2):

b=8
n=2
n-1=1
d_{n-1} =2

Valor total:

$2\text{X}8^1+7\text{X}8^0 = 16+7=(23)_{10}$

3) $(2A5)_{16} = (\ )_{10}$

$2\text{X}16^2+ 10\text{X } 16^1 +5\text{X}16^0=$

$= 512 + 160 + 5 = (677)_{10}$
4) $(6734)_8 = (\ )_{10}$

$6 \text{ X } 8^3 + 7 \text{ X } 8^2 + 3 \text{ X } 8^1 + 4 \text{ X } 8^0 =$

$= 3072 + 448 + 24 + 4 = (3548)_{10}$

5) $(27)_8$ $( )_{10}$

$2X8^1 + 7X8^0 = 23_{10}$

Obs: No desenvolvimento foram suprimidos os produtos onde os algarismos eram 0, visto que o resultado seria zero também (0 X 28 etc.).

6) $(457)_9 = ( )_{10}$

$4X9^2 + 5X9^1 + 7X9^0$

$= 324 + 45 + 7 = (376)_{10}$

7) $(243)_5 = ( )_{10}$

$2 X 5^2 + 4 X 5^1 + 3 X 5^0 =$

$50 + 20 + 3 = (73)_{10}$

1.3.3 - Conversão de Números Decimais para uma Base B

A conversão de números, representados na base 10, para seus valores equivalentes em uma base B qualquer é efetuada através de um processo inverso ao do subitem anterior (base B para base 10).

A conversão é obtida dividindo-se o número decimal pelo valor da base desejada; o resto encontrado é o algarismo menos significativo do valor na base B (mais à direita). Em seguida, divide-se o quociente encontrado pela base B; o resto é o outro algarismo (à esquerda); e assim, sucessivamente, vão-se dividindo os quocientes pelo valor da base até se obter quociente de valor zero. Em cada divisão, o resto encontrado é um algarismo significativo do número na nova base; o primeiro resto encontrado é o valor do algarismo menos significativo e o último resto será o algarismo mais significativo (mais à esquerda).

Na realidade, o algoritmo de conversão pode ser definido com vários critérios de parada, tais como:

a) Enquanto quociente for diferente de zero:

- dividir dividendo por divisor
- extrair resto como algarismo e colocá-lo à esquerda do anterior
- repetir

Quando quociente for igual a zero, parar.

b) Enquanto dividendo for maior que divisor:

- dividir dividendo por divisor
- extrair resto como algarismo e colocá-lo à esquerda do anterior
- repetir

Usar o dividendo (que agora é menor que o divisor) como último algarismo à esquerda (algarismo mais significativo).

Exemplo 3.8

1) $(3964)_{10} = (\ )_8$

3964/8 = 495	$resto_0$ = 4 (algarismo menos significativo)
495/8=61	resto =7
61/8=7	$resto_2$ =5
7/8 = O	$resto_3$ = 7 (algarismo mais significativo)

O número é, então, $(7574)_8$